

Θεωρία Αριθμών

10/11/15

Διοφαντικές εξισώσεις

Α. x $3x + 6y = 18 \Rightarrow 3 | 3x + 6y = 18 \Rightarrow 1x + 2y = 9 \quad (1)$

$3x + 6y = 4$, $3 | 3x, 6y \Rightarrow 3 | 3x + 6y = 4 \Rightarrow$ δεν υπάρχουν

$ax + by = c$ ακέραιοι x και y ώστε να την
 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ εναρμόζουν.

$(1) \Rightarrow (1, 2) \mid 18$ (για να έχει λύση)

$1 \mid 18$ έχει λύση

2) Να βρεθούν οι λύσεις

α) Βρες μια με τον Ευκλείδη (x_0, y_0)

β) όλες δίνονται από $x = x_0 + \frac{b}{(a,b)} t$ $y = y_0 - \frac{a}{(a,b)} t$, $t \in \mathbb{Z}$

$(1, 2)$ βρες τον με τον Ευκλείδη

$2 = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow \text{ΜΚΔ} = 1$

$1 = 1 + 2 \cdot 0$

$x_0 = 1, y_0 = 0 \xrightarrow{\in \mathbb{N}, 6} x_0' = 6, y_0' = 0$

$1x_0 + 2y_0 = 1$

$x = 6 + 2t$ } $\in \mathbb{N}$ εναρμόζουν

$y = 0 - 1t$ } $1 \cdot (6 + 2t) + 2(-t) = 6 + 2t - 2t = 6$

Πρόγραμμα

έστω $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ και $d = (a_1, \dots, a_k)$ ΜΚΔ

Η εξίσωση $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k = c$

έχει ακέραιες λύσεις $\Leftrightarrow d | c$

Π. x

1) $6x + 8y + 10z = 1$

Μ.Κ.Δ $(6, 8, 10) = 2 \nmid 1 \Rightarrow$ Οχι Ακέραιες λύσεις.

$$2) 6x + 8y + 10z = 2 \Rightarrow 3x + 4y + 5z = 1 \quad \text{έχει λύσεις}$$

Όπως θα ζη βρούμε

$$3x + 4y + 5z = 1$$

$$(3, 4) = 1 \quad \text{ορίσουμε}$$

$$(A) \quad \boxed{3x + 4y = 1 + w}$$

$$1w + 5z = 1$$

Όπως η προηγούμενη

$$(1, 5) = 1 \mid 1 \quad \text{έχει λύσεις.}$$

$$\delta 1 + \underset{0}{\delta} 5 = 1 \quad (\text{παίρνουμε } \delta = 1 \quad \text{και } \delta = 0)$$

$$w_0 = 1 \quad \text{και} \quad z_0 = 0$$

$$w = 1 + 5t, \quad t \in \mathbb{Z}'$$

$$\boxed{z = 0 - 1t}$$

$$(A) \Rightarrow 3x + 4y = 1$$

$$(3, 4) = 1 \mid 1$$

$$\underset{(-1)}{e} 3 + \underset{1}{J} 4 = 1 \quad (\text{παίρνουμε } e = -1 \quad \text{και } J = 1)$$

$$x_0 = -1 \quad \text{και} \quad y_0 = 1$$

$$x = -1 + 4s, \quad s \in \mathbb{Z}' \quad (\text{ζωπά αυτές τις λύσεις και κάνω } xw)$$

$$y = 1 - 3s$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = (-1 + 4s)(1 + 5t) \\ y = (1 - 3s)(1 + 5t) \end{cases}$$

$$\text{Λύση: } z = 0 - t = -t$$

$$x = -1 + 4s - 5t + 20st \quad \text{με } s, t \in \mathbb{Z}'$$

$$y = 1 - 3s + 5t - 15st$$

Π.Χ] Να προσέχει το πλήθος των θετικών ακεραίων λύσεων

εως $392x + 21y = 14$

$(392, 21) = 7 \mid 14$ έχει λύσεις

$392 = 18 \cdot 21 + 14 \rightarrow 21 = 1 \cdot 14 + 7$

$$\begin{array}{r|l} 392 & 21 \\ 18 \cdot 21 & 18 \\ \hline 14 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 21 & 14 \\ 7 & 1 \\ \hline & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 14 & 7 \\ 0 & 2 \\ \hline & \end{array}$$

$7 = 21 - 14 = 21 - (392 - 18 \cdot 21) = -392 + 19 \cdot 21$

↓

↓

$x_0 = -1 \quad y_0 = 19$

$\frac{392}{7}x + \frac{21}{7}y = \frac{14}{7}$

$56x + 3y = 2$

$(56, 3) = 1 \mid 2 \Rightarrow$ Λύσεις.

$$\begin{array}{r|l} 56 & 3 \\ 2 \cdot 28 & 18 \\ \hline 2 & \end{array}$$

$56 = 18 \cdot 3 + 2$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$

$1 = 3 - 2 = 3 - (56 - 18 \cdot 3) = -56 + 19 \cdot 3$

↓

-1

↓

19

$x = -1 + 3t$
 $y = 19 - 56t$

$\xrightarrow{x^2}$

$x = -2 + 6t, \quad t \in \mathbb{Z}$
 $y = 38 - 112t$

Πρέπει να βρούμε τους θετικούς

$x, y \geq 0 \mid -2 + 6t \geq 0 \quad \oplus \Rightarrow 6t \geq 2$

$38 - 112t \geq 0$

$\Rightarrow 38 \geq 112t \Rightarrow \frac{38}{112} \geq t \geq \frac{1}{3}$

$t \in \mathbb{Z}'$

Άρα δεν έχει θετική λύση.

Πόσες μη-αρνητικές λύσεις της $ax + by = c$ (1)

Αν έχει λύσεις τις βρισκουμε:

$$x = x_0 + \frac{b}{(a,b)} t \quad y = y_0 - \frac{a}{(a,b)} t$$

Πρέπει $x_0 + \frac{b}{(a,b)} t \geq 0$ και $y_0 - \frac{a}{(a,b)} t \geq 0$

$$\frac{x_0(a,b)}{b} \leq t \leq \frac{y_0(a,b)}{a}, \quad t \in \mathbb{Z}!$$

Προβλήματα - Υπόλοιπα - MODULO

Π.Χ Να βρεθούν πρώτοι μορφής $p, p+10, p+14$

$p=2 \Rightarrow 12, 16$ πρώτοι!

$p=3 \Rightarrow 13, 17$ ΝΑΙ

$p \geq 3$ πρώτος

Διαιρούμε τον p με τον 3

$p \neq 3k, k \geq 1$

$p = 3k+1$

$p = 3k+2$

Αν το $p = 3k+1 \Rightarrow p+10 = 3k+11$

$p+14 = 3k+15!$

$\Rightarrow p \neq 3k+1$

Αν το $p = 3k+2 \Rightarrow p+10 = 3k+12!$

$\Rightarrow p \neq 3k+2$. Άρα δεν υπάρχει πρώτος ≥ 3 με $p+10$ και $p+14$ πρώτους.

Ορισμός: Δύο ακέραιοι a και b καλούνται ισοζυγοί ή ισοσυνόλογοι ως προς το φυσικό $n \geq 1$ αν $a-b$ διαιρείται από το $n \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}$

Π.χ $n=3$ $a=-17$ $b=10$

Θα είναι ισοσυνόλογοι arr

$a-b$ διαιρείται από το 3

$$-17 - 10 = -27 = (-9) \cdot 3 \quad \text{Είναι}$$

$$-17 \equiv 10 \pmod{3}$$

$$-17 = 3(-6) + \boxed{1} \quad a \text{ και } b$$

$$10 = 3 \cdot 3 + \boxed{1}$$

Πρόταση

$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow$ ο a και ο b έχουν το ίδιο υπολοίπο ως προς n .

Απόδ.

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a - b = kn$$

$$a = xn + u_1, \quad \boxed{0 \leq u_1, u_2 < n}$$

$$b = yn + u_2$$

$$a - b = xn + u_1 - yn - u_2 = (x - y)n + u_1 - u_2 \Rightarrow u_1 - u_2 \text{ διαιρείται}$$

$$a - b = kn \quad \Rightarrow \quad \text{από το } n$$

$$0 \leq u_1, u_2 < n$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq u_1 < n \\ -n \leq -u_2 \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -n < u_1 - u_2 < n$$

$$u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow \boxed{u_1 = u_2}$$

Π.Χ $5k + 1 \equiv 1 \pmod{5}$

$$\{1, 6, 11, 16, \dots\} = [1]_5 = [5k+1]_5$$

$$\{-4, -9, -14, \dots\} \rightarrow$$

$$\{2, 7, 12, \dots\} \cup \{-3, -8, -13, \dots\} = [2]_5 = [5k+2]_5$$

$$\{0, \pm 5, \pm 10, \dots\} = [0]_5 = [5k]_5$$

$$\{3, 8, \dots\} \cup \{-2, -7, \dots\} = [3]_5 = [5k+3]_5$$

$$\{4, 9, \dots\} \cup \{-1, -6, \dots\} = [4]_5 = [5k+4]_5$$

Έστω m τυχαίος ακέραιος $m = 5 \cdot n + u$, $0 \leq u \leq 4 \Rightarrow m \in [u]_5$

$$\mathbb{Z}' = [0]_5 \cup [1]_5 \cup [2]_5 \cup [3]_5 \cup [4]_5$$

ξένες $\cup$ υνότητες

$$A \cup B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \quad \text{Ξένη ένωση}$$

Επειδή κάθε αριθμός διαγόμενος με το 5 δίνει μοναδικό υπόλοιπο, αυτός θα βρεθεί σε μια μόνο κλάση $[u]$ ανάλογα με το υπόλοιπό του.

Π.Χ Βρήςτε τις κλάσεις modulo 2
 Μόνο δύο κλάσεις : υπόλοιπο 0
 υπόλοιπο 1

$$[0]_2 = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} \text{ αρτιοί}$$

$$[1]_2 = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\} \text{ περιττοί}$$